Betrachtungen

über

verschiedene Gegenstände der neueren Geometrie

von

C. T. ANGER,
Professor am Gymnasium und Direktor der Königlichen Gewerbeschule zu Danzig.

Erstes Heft:
Einleitung. — Theorie der Aehnlichkeitspunkte.

Mit drei Figurentafeln.

DANZIG 1839,
bei L. G. Homann.

Vorwort.

Nachdem *Lambert* die Perspective auf einige Aufgaben der ebenen Geometrie angewandt hatte, verging bekanntlich eine lange Zeit, bis man die Fruchtbarkeit dieser Ansicht in ihrem ganzen Umfange erkannte, und die Geometrie in ihrer jetzigen Gestalt sich entfaltete. — Die Verdienste eines *Poncelet* und *Steiner* um diesen in neuerer Zeit entstandenen Theil der Geometrie sind zu bekannt, als dass es nöthig wäre, die zahlreichen Arbeiten dieser berühmten Mathematiker, deren Name nur mit dem eines *Euclid* zugleich der Vergessenheit anheimfallen kann, hier näher zu bezeichnen. Allein die Fortschritte in dieser Wissenschaft sind so bedeutend, und sie selbst hat gegenwärtig eine solche Ausdehnung gewonnen, dass sie der Geometrie der Alten als selbstständige Wissenschaft gegenüberzustehen scheint. Eine solche Trennung kann wohl keine durch einen innern Organismus gebotene sein, und mit Recht hat man unlängst irgendwo die Frage aufgestellt, durch welche Betrachtungen eine Verbindung dieser beiden Theile einer Wissenschaft zu bewirken sei? — welche Frage um

so wichtiger ist, als es gegenwärtig an der Zeit sein dürfte, die neuere Geometrie nicht länger aus dem Kreise des öffentlichen Unterrichts zu verbannen. — Alles wird dabei auf die Fundamente ankommen, auf welchen der neue Anbau seine Gipfel erheben soll. Wenn es diesen Fundamenten auch nie an Festigkeit fehlen wird, so muss doch der Raum nicht zu beengt sein, wenn jene das Ganze sollen tragen können. Die neuere Geometrie darf, wie es scheint, mit der Stereometrie in nahe Verbindung gebracht werden, und zwar kann sie da beginnen, wo die Lehre von der Lage der Linien und Ebenen im Raume sich schliesst. —

Von dieser Ansicht geleitet, habe ich in den folgenden Blättern über verschiedene Gegenstände der neueren Geometrie einige Betrachtungen angestellt, welche in den folgenden Heften ihre Fortsetzung erfahren dürften, wo denn auch die Anwendungen des, in diesem ersten Hefte enthaltenen theoretischen Theils, nicht fehlen würden.

Danzig, im November 1839.

Der Verfasser.

Wenn eine Ebene und ausserhalb derselben ein fester Punkt gedacht wird, und man von demselben nach einem im Raume beliebig angenommenen Punkte eine Gerade zieht, so giebt es im Allgemeinen immer einen Punkt, in welchem diese die Ebene trifft. — Die Ebene soll im Folgenden **Projectionsebene**, der feste Punkt **Projectionsmittelpunkt**, der beliebig angenommene Punkt das **Object**, die Gerade, welche durch diese beiden Punkte hindurchgeht **Projectionsstrahl**, der Punkt, in welchem dieser die Projectionsebene trifft, die **perspectivische Projection** des Objects genannt werden. —

Wenn man vom Projectionsmittelpunkte ein Loth auf die Projectionsebene fällt, so heisse der Fusspunkt desselben der **Grundpunkt des Projectionsmittelpunkts**, und analog dieser Benennung möge der Fusspunkt des von dem Object auf die Projectionsebene gefällten Lothes, der **Grundpunkt des Objects** heissen. — Aus diesen Erklärungen und aus bekannten geometrischen Eigenschaften, ergeben sich nun leicht die folgenden Sätze:

1) Die perspectivische Projection fällt immer in die Gerade, welche die Grundpunkte des Objects und des Projectionsmittelpunkts verbindet;
2) wenn das Object und der Projectionsmittelpunkt einen gemeinschaftlichen Grundpunkt haben, so ist derselbe zugleich die perspectivische Projection des Objects;
3) wenn das Object und der Projectionsmittelpunkt beide auf **derselben** Seite der Projectionsebene liegen, und gleichweit von derselben entfernt sind, so fällt die perspectivische Projection in unendliche Entfernung vom Grundpunkte des Projectionsmittelpunkts;
4) wenn das Object und der Projectionsmittelpunkt auf **entgegengesetzten** Seiten der Projectionsebene liegen und gleichweit von derselben entfernt sind, so fällt die perspectivische Projection in den Mittelpunkt der Geraden, welche beide Grundpunkte verbindet;
5) wenn das Object in der Projectionsebene liegt, so fällt die perspectivische Projection mit demselben zusammen;
6) die Abstände des Projectionsmittelpunkts und des Objects von der Projectionsebene verhalten sich zu einander respective wie die Entfernungen der perspectivischen Projection von den Grundpunkten, und zwar fällt dieselbe entweder zwischen beide Grundpunkte oder in die Verlängerung der Geraden, welche beide mit einander verbindet, je nachdem das Object und der Projectionsmittelpunkt auf entgegengesetzten Seiten, oder auf derselben Seite der Projectionsebene liegen.

Die perspectivische Projection irgend einer Linie entsteht, wenn man sämmtliche Punkte derselben projicirt, und diese Projectionen mit einander durch eine Linie verbindet; die perspectivische Projection irgend einer Fläche, wenn man sämmtliche Punkte derselben sich projicirt denkt, und von diesen Projectionen diejenigen durch Linien mit einander verbindet, deren entsprechende in der zu projicirenden Fläche mit einander verbunden sind, oder verbunden gedacht werden müssen. Die zu projicirende Linie oder Fläche, soll ebenfalls, der Kürze wegen, das Object heissen.

Die perspectivische Projection einer Geraden ist im Allgemeinen wieder eine Gerade, und zwar erhält man dieselbe, wenn man zwei beliebige Punkte des Objects projicirt und diese Projectionen durch eine Gerade verbindet. Ist hier das Object begrenzt, so erhält man die Projection ihrer Grösse und Lage nach, wenn man die Projectionen der Endpunkte durch eine Gerade verbindet.

Wenn das Object eine Gerade, und mit der Projectionsebene parallel ist, so ist es auch mit der perspectivischen Projection parallel. Ist das Object in diesem Falle begrenzt, und liegt dasselbe mit dem Projectionsmittelpunkte auf derselben Seite der Projectionsebene, so ist der Abstand des Projectionsmittelpunkts von der Projectionsebene entweder

a, grösser, oder
b, kleiner, oder
c, eben so gross als der Abstand des Objects von derselben Ebene.

Im Falle [*a*] ist die Projection allemal grösser als das Object; im Falle [*b*] ist sie entweder grösser, oder kleiner oder eben so gross, je nachdem der Abstand des Projectionsmittelpunkts von der Projectionsebene grösser oder kleiner oder eben so gross als die Hälfte des Abstandes des Objects von dieser Ebene ist; im Falle [*c*] ist die Projection unendlich gross, und zwar ist ihr Abstand vom Grundpunkte des Projectionsmittelpunkts ebenfalls unendlich gross, d. h. sie ist unendlich gross und fällt in unendliche Entfernung.

Wenn das Object, (eine mit der Projectionsebene parallele Gerade), und der Projectionsmittelpunkt auf entgegengesetzten Seiten der Projectionsebene liegen, so ist die perspectivische Projection allemal kleiner als dasselbe.

Die Grösse des Objects verhält sich hier immer zur Grösse der perspectivischen Projection, wie der Abstand des Projectionsmittelpunkts von dem Objecte zu dem Abstande dieses Punktes von der Projection.

Die Entfernungen beliebiger Punkte im Object verhalten sich hier zu einander, wie die entsprechenden Entfernungen in der perspectivischen Projection.

Lehrsatz 1. „Wenn die zu projicirende Gerade auf der Projectionsebene rechtwinklig ist, so ist die perspectivische Projection eine Gerade, welche durch den Grundpunkt des Projectionsmittelpunkts geht."

Beweis. Man verlängere das Object bis die Projectionsebene in einem Punkte getroffen wird, so ist derselbe zugleich die perspectivische Projection eines Punktes desselben. Denkt man sich nun das Object bis ins Unendliche verlängert, so wird es nur darauf ankommen, den unendlich weit entfernten Punkt ebenfalls zu projiciren. Die Projection dieses Punktes ist aber der Grundpunkt des Projectionsmittelpunkts, indem das Object und das auf die Projectionsebene gefällte Loth mit einander parallel sind, also beide unendlich weit verlängert, sich in jenem unendlich weit entfernten Punkte treffen.

Da dasselbe, was hier von einer auf der Projectionsebene rechtwinkligen Geraden bewiesen wurde, ebensowohl von jeder andern gilt, so ergiebt sich „dass die perspectivischen Projectionen aller Geraden, welche auf der Projectionsebene rechtwinklig sind, verlängert im Grundpunkte des Projectionsmittelpunkts zusammentreffen."

Lehrsatz 2. „Wenn die zu projicirende Gerade mit der Projectionsebene einen beliebigen Winkel bildet, so ist die perspectivische Projection eine Gerade, welche durch den Punkt geht, in welchem eine durch den Projectionsmittelpunkt mit dem Object parallel gezogene Gerade, die Projectionsebene trifft."

Beweis. Man verlängere das Object bis die Projectionsebene in einem Punkte getroffen wird, so ist derselbe zugleich die perspectivische Projection eines Punktes desselben. Denkt man sich nun das Object bis ins Unendliche verlängert, und zieht aus dem Projectionsmittelpunkte eine Gerade mit dem Object parallel, so wird diese offenbar der Projectionsstrahl jenes in unendlicher Entfernuug liegenden Endpunktes des Objects sein, also hat man die Projectionen von zwei in dem Object liegenden Punkten und die Richtung der perspectivischen Projection jener Geraden ist bestimmt.

Aus diesem Satze ergiebt sich „dass die Projectionen aller Geraden, welche untereinander parallel sind und mit der Projectionsebene einen beliebigen Winkel bilden, in dem Punkte zusammentreffen, in welchem eine durch den Projectionsmittelpunkt mit ihnen parallel gezogene Gerade, die Projectionsebene trifft." — Man sieht leicht, dass der vorhergehende Lehrsatz in diesem allgemeineren enthalten ist.

Der Punkt, in welchem die Projectionen aller untereinander paralleler Geraden sich treffen, soll Verschwindungspunkt dieser Geraden genannt werden.

Wenn also in einer Ebene mehrere Gerade von einem Punkte ausgehen, so können dieselben als perspectivische Projectionen von eben so vielen untereinander parallelen Geraden betrachtet werden, d. h. „der ebene Strahlbüschel ist als eine perspectivische Projection eines Systems paralleler Geraden anzusehen, deren Verschwindungspunkt der Mittelpunkt des Strahlbüschels ist."

„Jedes Trapez mit zwei parallelen Seiten ist zu betrachten als die perspectivische Projection eines Parallelogramms, von welchem zwei parallele Seiten mit der Projectionsebene parallel sind, — der Punkt, in welchem die nichtparallelen Seiten sich treffen, als der Verschwindungspunkt der beiden andern Seiten des Parallelogramms. — Die Gerade, welche den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen des Trapezes mit dem Durchschnittspunkt der nichtparallelen Seiten verbindet, ist als die perspectivische Projection einer dritten Geraden anzusehen, welche die beiden mit der Projectionsebene parallelen Seiten des Parallelogramms in ihren Mittelpunkten trifft."

Wenn demnach bei einem Trapeze mit zwei parallelen Seiten, der Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen mit dem Durchschnittspunkte der beiden nicht parallelen Seiten durch eine Gerade verbunden wird, so trifft dieselbe die beiden parallelen Seiten in ihren Mittelpunkten.

Hieraus ergiebt sich die Construction folgender Aufgaben:

Aufgabe 1. „Wenn in einer Ebene zwei parallele Gerade liegen, und in der einen eine begrenzte Strecke gegeben ist, mittelst des Lineals allein diese Strecke zu hälften."

Auflösung. Man nehme (Fig. 1. a u. b.) in derselben Ebene einen beliebigen Punkt an, ziehe von ihm nach den Endpunkten der gegebenen Strecke zwei Gerade, so dass dieselben, oder ihre Verlängerungen, die andere Parallele treffen, so entsteht in dieser eine andere begrenzte Strecke. Man verbinde nun diejenigen Endpunkte der beiden parallelen Strecken, welche noch nicht durch Gerade verbunden sind, durch zwei Gerade, und den Durchschnittspunkt dieser mit dem beliebig angenommenen Punkte durch eine Gerade, so wird dieselbe die gegebene Strecke in ihrem Mittelpunkte treffen. — Diese Auflösung gilt für beide Fälle; der beliebige Punkt mag zwischen den beiden Parallelen angenommen sein, oder nicht.

Aufgabe 2. „Wenn in einer Geraden eine begrenzte Strecke mit ihrem Mittelpunkte, und ausserhalb derselben ein Punkt gegeben ist, durch diesen mit der Geraden eine Parallele allein mit Hülfe des Lineals zu ziehen."

Auflösung. Man verbinde den gegebenen Punkt, durch welchen die Parallele gehen soll, mit einem Endpunkte der gegebenen Strecke durch eine unbegrenzte Gerade; nehme in derselben einen beliebigen Punkt an, und ziehe von ihm nach den beiden andern Punkten der gege-

benen Strecke zwei Gerade. Man verbinde nun den gegebenen Punkt mit dem zweiten Endpunkte und bemerke den Punkt, wo die erste dieser Geraden getroffen wird, — durch diesen und den gegebenen ziehe man endlich eine Gerade, welche die nach dem zweiten Endpunkte gezogene in einem Punkte treffen wird; diesen und den gegebenen verbinde man durch eine Gerade, so wird dieselbe die verlangte Parallele sein. — Die Auflösung bleibt dieselbe, man mag den Hülfspunkt annehmen wo man wolle.

Aufgabe 3. „Wenn zwei parallele Gerade gegeben sind, durch irgend einen gegebenen Punkt eine dritte Parallele zu ziehen."

Auflösung. Man hälfte in der einen der beiden Parallelen eine beliebige Strecke, so ist die Aufgabe auf die vorhergehende zurückgeführt.

Aufgabe 4. „Wenn zwei parallele Gerade, AB, CD und in der einen eine begrenzte Strecke, AB, gegeben sind, so soll in der nämlichen Geraden eine andere Strecke gefunden werden, welche ein Vielfaches jener ist."

Auflösung. Man ziehe (Fig. 2.) durch einen beliebigen Punkt E nach den Endpunkten der gegebenen Strecke zwei Gerade EA, EB, so, dass dieselben mit den beiden gegebenen Parallelen ein Trapez mit zwei parallelen Seiten ABGF bilden. Man ziehe durch den beliebig angenommenen Punkt E eine dritte Parallele EH, verlängere eine Diagonale des Trapezes AG, bis jene in einem Punkte I getroffen wird; verbinde I mit F und bemerke den Punkt K, in welchem AB und IF verlängert sich treffen, so ist $AK = AB$, also $BK = 2AB$, mithin AB verdoppelt. — Man wiederhole diese Operation nunmehr in Beziehung auf AK, so ergiebt sich in der Verlängerung von AB eine zweite Strecke, welche gleich AB ist, d. h. diese ist nunmehr verdreifacht. Auf dieselbe Weise lässt sich die gegebene Strecke vervierfachen, verfünffachen u. s. w.

Beweis. Der beliebig angenommene Punkt E, ist anzusehen als Verschwindungspunkt zweier paralleler Seiten eines Parallelogramms, von welchem die erhaltenen Trapeze die perspectivischen Projectionen sind, und ebenso ist der Punkt I als Verschwindungspunkt derjenigen Trapeze zu betrachten, welche durch die beiden gegebenen Parallelen und die von ihm gezogenen Geraden, gebildet werden, woraus die Richtigkeit der Construction hervorgeht.

Auf diese Aufgabe lassen sich, wie man leicht sieht, die folgenden unmittelbar zurückführen:

1) Von irgend einem gegebenen Punkte derjenigen parallelen Geraden, in welcher die begrenzte Strecke gegeben ist, ein beliebiges Vielfache derselben abzustecken;
2) die gegebene Strecke in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen;
3) in derselben parallelen Geraden eine andere Strecke zu finden, welche zu der gegebenen ein beliebiges rationales Verhältniss hat.

Lehrsatz 3. „Wenn das Object irgend eine begrenzte Gerade mit ihrem Mittelpunkte ist, welche gegen die Projectionsebene eine beliebige Neigung hat, so enthält die Projection vier harmonische Punkte, nämlich die Projectionen der Endpunkte, die Projection des Mittelpunkts des Objects, und seinen Verschwindungspunkt."

Beweis. Die beiden Endpunkte des Objects, der Mittelpunkt und der in unendlicher Entfernung liegende Punkt desselben, sind harmonische Punkte, also auch die Projectionen derselben.

Jede Gerade, in welcher sich vier harmonische Punkte befinden, kann demnach als die perspectivische Projection einer gegen die Projectionsebene beliebig geneigten Geraden mit ihrem Mittelpunkte und unendlich entfernten Punkte betrachtet werden.

Wenn irgend ein Parallelogramm, dessen Ebene mit der Projectionsebene einen beliebigen Winkel bildet, perspectivisch projicirt wird, so ist die Projection im Allgemeinen ein vollständiges Vierseit, und zwar treffen sich immer zwei gegenüberliegende Seiten desselben in den Verschwindungspunkten paralleler Seiten des Parallelogramms.

Lehrsatz 4. „Jedes vollständige Vierseit kann als die perspectivische Projection eines gegen die Projectionsebene geneigten Parallelogramms betrachtet werden, und zwar sind die Punkte, in welchen je zwei der drei Diagonalen des vollständigen Vierseits sich treffen, als die Projectionen der ihnen entsprechenden Punkte jenes Parallelogramms anzusehen."

Beweis. Beim Parallelogramme finden zwar nur zwei Diagonalen wirklich statt, indessen ist die dritte als in unendlicher Entfernung liegend denkbar. Von dieser ist die Verbindungslinie jener beiden Verschwindungspunkte, d. i. die dritte Diagonale des vollständigen Vierseits, die Projection.

Lehrsatz 5. „In jedem vollständigen Vierseit wird jede der beiden Diagonalen des zu ihm gehörigen einfachen Vierseits, durch die andere und die dritte harmonisch getheilt."

Beweis. Jeder Punkt in der dritten Diagonale ist als die Projection des unendlich entfernten Endpunktes einer in der Ebene des Parallelogramms liegenden Geraden zu betrachten. Da nun die beiden Diagonalen des einfachen Vierseits ebenfalls als die Projectionen solcher Geraden, nämlich der beiden Diagonalen des Parallelogramms anzusehen sind, so sind die beiden Durchschnittspunkte jener Diagonalen mit der dritten, die Projectionen von unendlich entfernten Punkten der Diagonalen des Parallelogramms.

Dieser Satz ist in dem folgenden allgemeinen enthalten:

Lehrsatz 6. In jedem vollständigen Vierseit wird jede der drei Diagonalen durch die beiden andern harmonisch getheilt.“

Beweis. Die beiden Diagonalen des Parallelogramms und die, durch den Schnittpunkt derselben mit jedem Seitenpaare parallel gezogenen Geraden, sind, wie sich leicht zeigen lässt, vier harmonische Strahlen, also sind auch die Projectionen dieser Geraden ebenfalls solche, mithin wird auch die dritte Diagonale des vollständigen Vierseits, durch die beiden andern harmonisch getheilt.

Auf diesen Satz gründen sich unter andern die Constructionen folgender Aufgaben, deren Auflösungen wir übergehen:

1) Zu drei in einer Geraden gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt allein mittelst des Lineals zu finden;
2) zu drei durch einen Punkt gehenden Strahlen den vierten harmonischen Strahl mittelst des Lineals zu finden;
3) wenn ein rechter und ein anderer beliebiger Winkel einerlei Scheitelpunkt und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, diesen Winkel mittelst des Lineals zu verdoppeln;
4) wenn von drei Strahlen, die durch einen Punkt gehen, der eine mit den beiden andern gleiche Winkel bildet, mittelst des Lineals allein einen vierten Strahl zu finden, welcher ebenfalls mit diesen beiden Strahlen gleiche Winkel bildet, und daher auf jenem rechtwinklig ist.*)

Der Kürze wegen wollen wir im Folgenden die Figur, welche zu der vorliegenden das Object ist, immer durch dieselben Buchstaben in Klammern eingeschlossen bezeichnen.

Lehrsatz 7. „Wenn (Fig. 3.) irgend zwei Gerade AB, AC, von beliebigen durch einen Punkt D gehenden Geraden DE, DF, DG, u. s. w. geschnitten werden, und man in den dadurch entstehenden Vierecken KLOP, LMPQ, u. s. w. die Diagonalen zieht, so liegen die Durchschnittspunkte derselben, α, β, γ u. s. w. sämmtlich in einer Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt A jener Geraden AB, AC geht, und zu diesen und der Geraden AD die vierte, der letztern zugeordnete, harmonische ist.“

Beweis. Die Geraden AB, AC, sind zu betrachten als die Projectionen zweier mit einander paralleler Geraden (AB), (AC), ebenso die Geraden DE, DF, DG u. s. w. als Projectionen

*) Man sehe: Steiner: „Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Berlin 1833. §. 5.“

der parallelen Geraden (DE), (DF), (DG), ... die Vierecke KLOP, LMPQ u. s. w. also als die Projectionen der Parallelogramme (KLOP), (LMPQ), u. s. w. und die Durchschnittspunkte α, β, γ... als die Durchschnittspunkte (α), (β), (γ), u. s. w. der Diagonalen dieser Parallelogramme. Da nun, wie sich leicht zeigen lässt, (α), (β), (γ), u.s.w. in einer Geraden liegen, welche mit (AB) und (AC) parallel ist, und von beiden gleich weit absteht, ferner AD als die Projection einer Geraden (AD) betrachtet werden kann, welche ebenfalls mit diesen beiden parallel ist und unendlich weit von ihnen entfernt ist, so sind (AB), (AC), (AD), (Aα) vier harmonische Strahlen, also auch deren Projectionen, nämlich AB, AC, AD, Aα ebenfalls harmonisch.*)

Lehrsatz 7. „Jedes Dreieck ist zu betrachten als die perspectivische Projection eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Ebene auf der Projectionsebene rechtwinklig ist.“

Beweis. Es sei Fig. 4. ABC das gegebene Dreieck. Man nehme eine beliebige Seite AB als zusammenfallend mit einer Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks an, von welchem das vorliegende als Projection erscheinen soll, so, dass AB sowohl Object als Projection ist. Es kommt nun nur darauf an des Projectionsmittelpunkts Grundpunkt und Abstand von der Projectionsebene zu bestimmen. Wird AB in D gehälftet und CD gezogen, so kann diese auf unzählige Arten als Projection der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite AB ist, betrachtet werden. Denn nimmt man in der Verlängerung von CD einen beliebigen Punkt, E, als Grundpunkt des Projectionsmittelpunkts an, so lässt sich der entsprechende Abstand des letztern jedesmal bestimmen. Zieht man nämlich von D aus in beliebiger Richtung eine Gerade DF gleich der Höhe des gleichseitigen Dreiecks, aus E eine andere, EG, mit dieser parallel, und verbindet die Punkte F und C durch eine Gerade FCG, so ergiebt der Durchschnittspunkt G dieser beiden den Abstand EG des Projectionsmittelpunkts von der Projectionsebene.

Der Projectionsmittelpunkt und sein Grundpunkt können auch in unendlicher Entfernung angenommen werden, mithin ist jedes Dreieck auch als die Parallelprojection eines gleichseitigen zu betrachten.

Lehrsatz 8. „Jedes vollständige Vierseit ist zu betrachten als die perspectivische Projection eines Quadrats, dessen Ebene auf der Projectionsebene rechtwinklig ist.

Beweis. Es sei Fig. 5. ABCD ein beliebiges Viereck, EF die dritte Diagonale desselben. Man verlängere die Diagonalen AD, BD, bis EF und deren Verlängerung respective in den Punkten G, H, getroffen wird, so sind E, F die Verschwindungspunkte zweier gegenüberliegender

*) Den Satz, welcher im Raume diesem bekannten Satze analog ist, hat der Verfasser in seiner Schrift: „Analytische Darstellung der Basrelief-Perspective. Danzig 1834.“ mitgetheilt.

Seiten und G, H die Verschwindungspunkte der Diagonalen eines Parallelogramms, von welchem nach dem Obigen das vorliegende Viereck als perspectivische Projection anzusehen ist. Es kommt nun darauf an zu zeigen, dass der Projectionsmittelpunkt stets so angenommen werden könne, dass jenes Parallelogramm ein Quadrat werde, dessen Ebene auf der Projectionsebene rechtwinklig ist. Zuvörderst ist klar, dass die Ebene des Parallelogramms immer als auf der Projectionsebene rechtwinklig angenommen werden kann, denn man darf sich nur den Grundpunkt des Projectionsmittelpunkts in der Linie EG oder deren Verlängerung denken. Da nun das Quadrat dasjenige rechtwinklige Parallelogramm ist, in welchem die Diagonalen auf einander rechtwinklig sind, so bilden sowohl die Geraden, welche aus dem Projectionsmittelpunkte nach den Verschwindungspunkten der Seiten gezogen werden, als diejenigen, welche man aus demselben Punkte nach den Verschwindungspunkten der Diagonalen zieht, einen rechten Winkel, mithin liegt der Projectionsmittelpunkt in dem Durchschnittspunkte zweier Halbkreise, welche EF und GH zu Durchmessern haben, und deren Ebenen auf der Projectionsebene rechtwinklig sind. Aus dieser Betrachtung ergiebt sich für die Bestimmung des Projectionsmittelpunkts folgende Construction: „Man beschreibe über den Linien EF und GH als Durchmesser, nach derselben Seite zwei Halbkreise, welche einander im Punkte I treffen mögen, und fälle von I auf die Gerade EF ein Loth IK, so ist der Punkt K, in welchem diese Gerade getroffen wird, der Grundpunkt des Projectionsmittelpunkts, und IK der Abstand des Projectionsmittelpunkts von der Projectionsebene.“ —

Lehrsatz 9. „Wenn das Object irgend eine ebene mit der Projectionsebene parallele Figur ist, so ist die perspectivische Projection eine dem Objecte ähnliche Figur.“

Der Beweis folgt leicht aus den obigen Betrachtungen.

Zusatz. Die perspectivische Projection eines mit der Projectionsebene parallelen Kreises ist wieder ein Kreis.

Aufgabe 5. „Man soll die perspectivische Projection eines Prismas entwerfen, dessen Grundebenen mit der Projectionsebene parallel sind.“

Auflösung. Man construire zwei ähnliche und ähnlich liegende Figuren, d. h. solche, deren homologe Seiten mit einander parallel sind, und verbinde die homologen Endpunkte durch gerade Linien, so sind erstere die Projectionen der beiden Grundebenen, und jene Verbindungslinien die Projectionen der Kanten des Prismas.

Aufgabe 6. „Man soll die perspectivische Projection eines Cylinders entwerfen, dessen Grundebenen mit der Projectionsebene parallel sind.“

Auflösung. Man construire zwei Kreise und ziehe, wenn der eine nicht innerhalb des andern liegt, an dieselben die äussern Tangenten.

Aufgabe 7. „Die perspectivische Projection einer Pyramide zu construiren, deren Grundebene mit der Projectionsebene parallel ist."

Auflösung. Man zeichne eine geradlinige Figur und ziehe aus den Ecken nach einem beliebig angenommenen Punkte gerade Linien, so ist jene als Projection der Grundebene, und dieser Punkt als Projection der Spitze anzusehen, die geraden Linien aber sind die Projectionen der Kanten.

Aufgabe 8. Die perspectivische Projection eines Kegels zu construiren, dessen Grundebene mit der Projectionsebene parallel ist."

Auflösung. Man zeichne einen Kreis und einen Punkt, so kann jener als Projection der Grundebene, und dieser als Projection der Spitze betrachtet werden. Wird der Punkt ausserhalb des Kreises angenommen, so ziehe man von ihm zwei Tangenten an denselben. Jede Verbindungslinie irgend eines Punktes der Peripherie mit jenem Punkte ist die perspectivische Projection einer auf der Mantelfläche des Kegels liegenden Geraden.

Aufgabe 9. „Die perspectivische Projection zweier Gegen-Kegel, (d. h. solcher, welche eine gemeinschaftliche Spitze (Mittelpunkt) haben, und wo die Strahlen der einen Kegelfläche die Verlängerungen der Strahlen der andern sind) wenn die Grundebenen beider mit der Projectionsebene parallel sind, zu construiren."

Auflösung. Man construire zwei Kreise, und ziehe an beide die innern Tangenten, so sind jene als die Projectionen der Grundebenen anzusehen, und der Durchschnittspunkt der Tangenten wird die Projection des Mittelpunkts beider Kegel sein.

Wenn man durch den Projectionsmittelpunkt irgend eine Ebene legt, welche die Projectionsebene in einer Geraden schneidet, so finden sich in dieser die Verschwindungspunkte aller Geraden vor, welche mit jener Ebene parallel sind, und umgekehrt, alle Gerade, welche im Raume irgendwo liegen, und sämmtlich mit einer Ebene parallel sind, haben ihre Verschwindungspunkte in einer Geraden, nämlich da, wo eine durch den Projectionsmittelpunkt mit jener Ebene parallel gelegte Ebene, die Projectionsebene schneidet; diese Gerade mag Verschwindungslinie genannt werden.

Das Bisherige wird, als Einleitung, hinreichend sein, um die folgenden Betrachtungen über Gegenstände der neueren Geometrie anstellen zu können.

Theorie der Aehnlichkeitspunkte.

Zwei Kreise mit ihrem äussern Aehnlichkeitspunkte, können betrachtet werden, als die perspectivische Projection eines Cylinders, dessen Grundebenen mit der Projectionsebene (der Ebene, in welcher die Zeichnung ausgeführt ist) parallel sind. Der innere Aehnlichkeitspunkt ist die Projection des Mittelpunkts der Axe des Cylinders; die Gerade, welche die Mittelpunkte beider Kreise verbindet, ist die Projection dieser Axe. Diejenigen Punkte im Raume, von welchen wir die in der Figur befindlichen als Projectionen betrachten, mögen, wie vorhin, durch dieselben Buchstaben wie diese, jedoch in Klammern eingeschlossen, bezeichnet werden. Der äussere Aehnlichkeitspunkt A (Fig. 6.) ist die Projection desjenigen unendlich weit entfernten Punktes, in welchem die parallelen Seitenlinien des Cylinders sich mit der Axe desselben treffen, d. h. (MA) ist unendlich. Ferner ist (MI) = (IM'), also liegen die Punkte (M), (I), (M'), (A), harmonisch, mithin auch ihre Projectionen, d. h. der innere Aehnlichkeitspunkt hat die obige Eigenschaft. Für den Fall, dass beide Kreise einander gleich sind, kann die Höhe des Cylinders gleich Null gesetzt werden, die Axe ist dann mit der Projectionsebene parallel, und der Punkt A fällt in unendliche Entfernung, der Punkt I aber in die Mitte zwischen M und M'.

Zieht man durch den Punkt A eine beliebige Linie, welche die beiden Kreise in den Punkten a, b, a', b' schneidet, so sind die Radien Ma, M'a', und Mb, M'b' parallel. Denn das Viereck Maa'M' ist die Projection eines Parallelogramms, welches entsteht, indem der Cylinder durch eine durch die Axe (MM') gelegte Ebene geschnitten wird; die Durchschnittslinien (Ma) und (M'a') sind also mit einander und mit der Projectionsebene parallel, mithin sind auch die Projectionen Ma und M'a' mit einander parallel. Ebenso wird bewiesen, dass Mb und M'b' parallel sind.

Das Viereck acc'a' ist die Projection eines Parallelogramms, welches in der Ebene des vorigen liegt, und in welchem die Durchmesser (ac), (a'c') sowohl, als die Seitenlinien des Cylinders (aa'), (cc') mit einander parallel sind. Da nun alle Diagonalen solcher Vierecke wie (acc'a') sich in einem und demselben Punkte der Axe des Cylinders (MM'), nämlich in dem Mittelpunkte (I) schneiden, so müssen auch die Projectionen dieser Diagonalen, nämlich ac', a'c mit MM' in einem Punkte und zwar in I zusammentreffen. Hieraus ergiebt sich, dass die Radien Ma, M'c' parallel sind, wenn man durch den innern Aehnlichkeitspunkt den Strahl aIc' zieht. Uebrigens ergiebt sich aus diesen Eigenschaften der Aehnlichkeitspunkte eine leichte Methode, diese Punkte zu finden, auch folgt daraus die Aehnlichkeit der entsprechenden Kreisbogen.

Nimmt man in einer der beiden Grundebenen des Cylinders, z. B. in (M) einen beliebigen Punkt (P) an, (der auch ausserhalb der Kreisperipherie liegen kann,) zieht durch denselben eine

Gerade parallel mit der Axe, bis die andere Grundebene in einem Punkte (P′) getroffen wird, so liegen die Projectionen dieser Punkte, nämlich P, P′ mit dem äussern Aehnlichkeitspunkte in einer geraden Linie und zwar sind die Linien PM, P′M′ mit einander parallel, weil sie als die Projectionen der mit der Projectionsebene parallelen Linien (PM), (P′M′) zu betrachten sind. Hieraus folgt: dass irgend einem Punkte, welchen man als zu dem einen Kreise gehörend ansieht, in Beziehung auf den andern Kreis ein anderer Punkt entspricht, und zwar so, dass beide mit dem äussern Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden liegen, und die Geraden, welche man von diesen Punkten nach den entsprechenden Mittelpunkten zieht, mit der Axe gleiche Winkel bilden. Sieht man z. B. den Punkt P als zum Kreise M gehörend an, so entspricht diesem Punkte in Beziehung auf den Kreis M′ ein anderer Punkt P′ und zwar so, dass PP′A eine Gerade und Winkel PMA = P′M′A wird.

Aus diesem Satze geht ferner hervor, dass irgend einer Geraden, welche man als zu dem einen Kreise gehörend ansieht, eine andere, ihr parallele, zum andern Kreise gehörende entspricht, wie z. B. die Gerade PQ, welche zum Kreise M gehören mag, eine entsprechende P′Q′ hat, die zum Kreise M′ gehört, und dass überhaupt jeder Figur, die man als zu dem einen Kreise gehörend annimmt, eine andere ihr ähnliche, deren Seiten mit den ihrigen einstimmig parallel sind, mittelst des äussern Aehnlichkeitspunkts entspricht. Bezeichnet man nämlich die zu dem Kreise M gehörende Figur durch F und zieht von den Eckpunkten der Figur (F), von welcher F die Projection ist, parallele Gerade mit der Axe des Cylinders, so bestimmen diese in der Grundebene (M′) eine der (F) congruente Figur (f), von welcher f die Projection ist; da nun die Figuren (F), (f) congruent und mit der Projectionsebene parallel sind, so müssen F und f ähnliche Figuren sein, welche ihre Seiten einstimmig parallel haben.

Zieht man von dem Punkte (P) durch den Mittelpunkt des Cylinders (I) eine Gerade, bis die Grundebene (M′) in einem Punkte (P″) getroffen wird, so ist (P′M′P″) eine Gerade, und zwar ist (P′M′) = (M′P″), also auch M′P′ = P′M″, d. h. jedem Punkte, welchen man als zu dem einen Kreise gehörend ansieht, entspricht mittelst des innern Aehnlichkeitspunktes in Beziehung auf den andern Kreis ein anderer Punkt, und zwar so, dass die von diesen Punkten nach den Mittelpunkten der ihnen zugehörigen Kreise gezogenen Geraden mit einander entgegengesetzt parallel sind, so ist z. B. PM der M′P″ entgegengesetzt parallel. Daraus folgt, ähnlich wie vorhin, dass jeder zu dem einen Kreise gehörenden Geraden auch mittelst des innern Aehnlichkeitspunkts eine zu dem andern Kreise gehörende ihr parallele Gerade entspricht, wie z. B. P″Q″ die entsprechende von PQ ist, und dass endlich jeder Figur, die man als zu dem einen Kreise gehörend ansieht, eine andere ihr ähnliche, deren Seiten den ihrigen entgegengesetzt parallel sind, mittelst des innern Aehnlichkeitspunkts entspricht, wie z. B F und f′ solche Figuren sind.

Die Gerade (M′P″) liegt in der Verlängerung von (M′P′) und beide Linien sind einander gleich, deshalb ist auch P′M′P″ eine Gerade und P′M′ = M′P″. Da dasselbe von jedem andern Punkte Q gilt, so ist auch Q′M′Q″ eine Gerade und Q′M′ = M′Q″, mithin ist P′Q′ = P″Q″, also sind auch die Abstände des Mittelpunkts in beiden Linien gleich gross.

Aus diesen Betrachtungen geht nun hervor, dass jedem Punkte, den man als zu dem einen Kreise gehörend betrachtet, mittelst beider Aehnlichkeitspunkte zwei andere in Beziehung auf den andern Kreis entsprechen, welche mit dem Mittelpunkte desselben in einer Geraden liegen; dass jeder Geraden, welche dem einen Kreise angehört, zwei andere gleich grosse einander parallele Gerade in Beziehung auf den andern Kreis entsprechen, welche von seinem Mittelpunkte gleichweit entfernt sind, und dass jeder Figur, welche dem einen Kreise angehört, in Beziehung auf den andern Kreis zwei congruente Figuren entsprechen, deren Seiten entgegengesetzt parallel sind.

Die Kreise M, M′ (Fig. 7. a u. b.) mögen als die Projectionen der Grundebenen (M), (M′) des Cylinders betrachtet werden, dann ist der äussere Aehnlichkeitspunkt A wiederum die Projection des unendlich entfernten Punktes der Axe (A). Man schneide den Cylinder durch parallele Ebenen, welche mit seiner Axe parallel sind, so werden die Grundebenen des Cylinders in parallelen Geraden geschnitten, als deren Projectionen wir die Geraden ab, cd, ef, gh im Kreise M und a′b′, c′d′, e′f′, g′h′, im Kreise M′ ansehen können, so dass die Trapeze abb′a′, cdd′c′ ... als Projectionen der Parallelogramme (abb′a′), cdd′c′ ... erscheinen. Denkt man in diesen Parallelogrammen die Diagonalen gezogen, so liegen die Durchschnittspunkte derselben sämmtlich in einer Geraden, welche die Axe des Cylinders in ihrem Mittelpunkte (I) schneidet. Daraus folgt nun sogleich folgender Satz:

Zieht man in einem Kreise M die parallelen Sehnen ab, cd, ef u. s. w. und in dem Kreise M′ die denselben mittelst des äussern Aehnlichkeitspunktes A entsprechenden, zieht alsdann in den Trapezen abb′a, cdd′c′ u. s. w. die Diagonalen, so liegen deren Durchschnittspunkte α, β, γ, u. s. w. sämmtlich in einer Geraden, welche durch den innern Aehnlichkeitspunkt I beider Kreise hindurchgeht, und auf diesen Sehnen rechtwinklig ist.

In dem Falle, dass die Sehnen ab, cd, u. s. w. wie in Fig. 7. a. der Axe MM′ parallel sind, bildet die Gerade α, β, γ u. s. w. mit dieser Axe einen rechten Winkel, sind dagegen die Sehnen auf der Axe rechtwinklig, so fällt jene Gerade mit der Axe zusammen.

Es seien in Fig. 8. die Kreise M, M′ wieder die Projectionen der Grundebenen (M), (M′) des Cylinders, und der äussere Aehnlichkeitspunkt A die Projection des unendlich entfernten Punktes der Axe (A). Die Gerade aa′A ist dann die Projection einer Seite des Cylinders.

Zieht man die Linien (Ma'), (M'a), so schneiden sich dieselben als Diagonalen des Parallelogramms (Maa'M') in ihrem Mittelpunkte (α), von welchem der Schneidungspunkt α der Linien Ma', M'a, die Projection ist; dasselbe gilt für jeden andern Punkt (β), (γ) u. s w. Die Punkte (α), (β), (γ) u. s. w. liegen aber in einem Kreise, dessen Ebene mit den Grundebenen (M), (M') parallel ist, und zwar entsteht dieser Kreis durch die Schneidung zweier Kegel, deren Grundebenen (M), (M') und deren Spitzen die Mittelpunkte dieser Grundebenen, nämlich resp. die Punkte (M') und (M) sind. Die Punkte α, β, γ, u. s. w. müssen daher ebenfalls in einem Kreise liegen. Da ferner die Ebene des Kreises ($\alpha\beta\gamma$...) durch den Mittelpunkt (I) der Axe des Cylinders geht, und der Mittelpunkt des Kreises mit diesem Punkte zusammenfällt, so ist der Mittelpunkt I des durch α, β, γ ... hindurchgehenden Kreises der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M und M'. Wir erhalten demnach folgenden Satz:

Nimmt man in der Peripherie eines der beiden Kreise, deren äusserer Aehnlichkeitspunkt A ist, etwa in M, beliebige Punkte a, b, c, d u. s. w. an; bestimmt die denselben mittelst dieses Aehnlichkeitspunkts in Beziehung auf den andern Kreis M' entsprechenden Punkte a', b', c', d' u. s. w., zieht alsdann aus den Mittelpunkten M, M' resp. nach den Punkten a', a; b', b;... Gerade, so schneiden sich je zwei in einem Punkte α, β, γ u. s. w., und alle diese Punkte liegen in einem Kreise, dessen Mittelpunkt I der innere Aehnlichkeitspunkt jener beiden Kreise M, M' ist; zugleich ergiebt sich, dass der Mittelpunkt M', der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M, I, und der Mittelpunkt M der äussere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M', I, ist.

Bezeichnet man die Radien der Kreise M, M', I respective durch R, r, ϱ, so hat man

$$MM' : IM' = R : \varrho$$
$$MM' : IM = r : \varrho$$
$$\text{also } MM' : MM' - IM' = R : R - \varrho, \text{ d. h.}$$
$$MM' : IM = R : R - \varrho, \text{ folglich ist}$$
$$R\varrho = Rr - r\varrho, \text{ oder}$$
$$\varrho = \frac{Rr}{R + r},$$

so dass der Radius des Kreises I auf leichte Art aus den Radien der Kreise M und M' gefunden werden kann. In diesem Ausdrucke für ϱ kommt die Entfernung der Mittelpunkte nicht vor, weshalb für jede Entfernung der Mittelpunkte der Radius des Kreises I constant bleibt, wenn nur die Radien für beide Kreise constant bleiben. In dem speciellen Falle, dass die Radien der beiden gegebenen Kreise gleich sind, wird der Radius des auf die angegebene Weise entstehenden Kreises halb so gross, als einer jener Radien.

Man betrachte Fig. 9. die drei Kreise M, M′, M″ als Projectionen von Grundebenen dreier Cylinder C, C′, C″, diese Grundebenen als parallel mit der Projectionsebene angenommen. Die Grundebenen (M) und (M′) mögen dem Cylinder C, (M) und (M″) dem Cylinder C′, und (M′) und (M″) dem Cylinder C″ angehören.

Legt man durch die Axen (MM′), (MM″), (M′M″) eine Ebene und durch den Projectionsmittelpunkt eine Ebene mit dieser parallel, so wird die Gerade, in welcher letztere die Projectionsebene schneidet, die Verschwindungslinie für die Ebene (MM′M″) sein, d. h. alle beliebige Gerade in dieser, finden in jener Geraden ihre Verschwindungspunkte. Da nun die Axen (MM′), (MM″), (M′M″) mit den Seiten ihrer Cylinder parallel sind, so ist der Punkt A, in welchem die an die Kreise M, M′ gelegten Tangenten sich treffen, der Verschwindungspunkt der Axe (MM′), und ebenso sind die Punkte A′, A″, in welchen die Tangenten der Kreise M, M″ und M′, M″ sich treffen, respective die Verschwindungspunkte der Axen (MM″), (M′M″), mithin liegen die drei Punkte A, A′, A″ sämmtlich in einer Geraden. Wir erhalten demnach folgenden Satz:

„Bestimmt man, wenn drei Kreise gegeben sind, für je zwei derselben die äussern Aehnlichkeitspunkte, so liegen diese drei Punkte allemal in einer und derselben Geraden.“

Betrachtet man ferner die drei innern Aehnlichkeitspunkte der Kreise M, M′, M″, nämlich die Punkte I, I′, I″ resp. als Projectionen der Mittelpunkte der Axen, (MM′), (MM″), (M′M″), so liegen diese Mittelpunkte offenbar in der Ebene (MM′M″), deren Verschwindungslinie die Gerade AA′A″ ist, also haben die Geraden (I′I″), (II″), (II′) in derselben Geraden ihre Verschwindungspunkte. Es ist aber, wie man leicht sieht, (I′I″) parallel mit (MM′); (II″) parallel mit (MM″) und (II′) parallel mit (MM″), also fallen die Verschwindungspunkte, der Geraden (I′I″), (II″), (II′) resp. mit den Punkten A, A′, A″ zusammen, und wir erhalten folgenden allgemeinen Satz:

„Von den sechs Aehnlichkeitspunkten, welche zu drei beliebigen in einer Ebene liegenden Kreisen gehören, liegen drei viermal in einer Geraden, nämlich die drei äussern Aehnlichkeitspunkte, und dann jeder äussere mit denjenigen beiden innern, von denen keiner der ihm zugehörige ist.“

Diese Betrachtungen können auf andere Figuren, welche nicht Kreise sind, ausgedehnt werden, indem man sich statt dreier Cylinder, drei Prismen denkt, deren Grundflächen mit der Projectionsebene parallel sind, und von denen je zwei eine Grundfläche gemeinschaftlich haben. Legt man durch den Projectionsmittelpunkt eine Ebene, welche mit sämmtlichen Kanten dieser drei Prismen parallel ist, so schneidet dieselbe die Projectionsebene in einer Verschwindungslinie, in welcher drei Verschwindungspunkte der Kanten der drei Prismen liegen müssen. Sieht man Fig. 10. die

drei ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren abcde, $a'b'c'd'e'$, $a''b''c''d''e''$, als die Projectionen der Grundflächen dreier Prismen P, P′, P″ an, von denen P die Grundflächen (abc...) u. ($a'b'c'$...); P′ die Grundflächen (abc...) und ($a''b''c$...); P″ die Grundflächen ($a'b'c'$...) und ($a''b''c''$..) haben mögen, und bestimmt man bei je zwei dieser Figuren die Aehnlichkeitspunkte A, A′, A″, so können diese resp. als die Verschwindungspunkte der Kanten der Prismen, P, P′, P″ betrachtet werden, und es ergiebt sich der folgende Satz:

„Bestimmt man bei drei ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren für je zwei derselben die äussern Aehnlichkeitspunkte, so liegen diese drei Punkte allemal in einer und derselben Geraden," von welchem der erste auf den Kreis Bezug habende Satz, wie man leicht sieht, nur ein specieller Fall ist.

Behufs der folgenden Untersuchungen wollen wir den Begriff des innern Aehnlichkeitspunkts erweitern. Wenn man bei zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren, z. B. abc... und $a'b'c'$... zu einem innerhalb der ersten beliebig angenommenen Punkte α den demselben mittelst des äussern Aehnlichkeitspunkts A in der andern Figur entsprechenden Punkt α' bestimmt, und die Gerade $\alpha\alpha'$ im Punkte M so theilt, dass $\alpha M : M\alpha' = \alpha A : \alpha' A$, so soll der Punkt M der innre Aehnlichkeitspunkt im weitern Sinne genannt werden. Hiernach haben zwei ähnliche und ähnlich liegende Figuren, welche immer als die Projectionen der Grundflächen eines Prismas anzusehen sind, unendlich viele innere Aehnlichkeitspunkte im weitern Sinne, und zwar sind dieselben nichts anderes als die Projectionen der Mittelpunkte von Geraden, welche man sich mit den Kanten des Prismas parallel, von einem Punkte der einen Grundfläche bis zur andern gezogen, vorstellen kann. Bei mehr als zwei ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren sollen diejenigen inneren Aehnlichkeitspunkte im weitern Sinne, welche sich auf entsprechende Punktenpaare beziehen, einander entsprechende innere Aehnlichkeitspunkte genannt werden. Wenn z. B in der Figur $a''b''c''$... der Punkt α'' dem Punkte α in der Figur abc... mittelst des äussern Aehnlichkeitspunkts A′, oder was dasselbe ist, dem Punkte α' in der Figur $a'b'c'$... mittelst des äussern Aehnlichkeitspunkts A″ entspricht, und die Punkte M′, M″ in den Geraden $\alpha\alpha''$, $\alpha'\alpha''$, so bestimmt sind, dass $\alpha M' : M'\alpha'' = \alpha A' : \alpha'' A'$ und $\alpha' M'' : M''\alpha'' = \alpha' A'' : \alpha'' A''$, so sind die drei Punkte M, M′, M″ entsprechende innere Aehnlichkeitspunkte. Da nun die Punkte (M), (M′), (M″) die Mittelpunkte der Geraden ($\alpha\alpha'$), ($\alpha\alpha''$), ($\alpha'\alpha''$) sind, so ist, wie man leicht sieht, (M′M″) parallel mit ($\alpha\alpha'$); (MM″) parallel mit ($\alpha\alpha''$), und (MM′) parallel mit ($\alpha'\alpha''$), mithin haben diese drei Paare paralleler Geraden resp die Verschwindungspunkte A, A′, A″, es gilt demnach folgender allgemeiner Satz:

„Von den sechs Aehnlichkeitspunkten, welche zu drei beliebigen, in einer Ebene befindlichen, ähnlichen und ähnlichliegenden Figuren gedacht werden können, liegen viermal drei in einer Geraden, nämlich die drei äussern Aehnlichkeitspunkte, und dann jeder äussere mit denjenigen beiden entsprechenden

inneren Aehnlichkeitspunkten, von denen keiner der ihm zugehörige ist.“ Von diesem Satze ist der zweite der obigen, auf den Kreis Bezug habenden Sätze, nur ein specieller Fall. Die drei inneren Aehnlichkeitspunkte, welche bei drei Kreisen durch das Schneiden der inneren Tangenten entstehen, sind nämlich als entsprechende innere Aehnlichkeitspunkte im weitern Sinne bei drei ähnlichen Figuren anzusehen, so dass jener Satz sich als Zusatz aus dem viel allgemeineren ergiebt.

Leonhard Euler hat in seiner Abhandlung: De Centro Similitudinis, welche in den Schriften der Petersburger Akademie der Wissenschaften [*Nova Acta Petrop. Tom. IX.*] abgedruckt ist, den Begriff des Aehnlichkeitspunktes in der möglichst grössten Allgemeinheit aufgefasst. Er zeigt nämlich, dass zwei ähnlichen Figuren, die in einer Ebene liegen, immer ein in derselben Ebene liegender Punkt zukommt, welcher die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man von den Endpunkten zweier homologer Seiten nach ihm Gerade zieht, zwei ähnliche Dreiecke entstehen. Ferner bestimmt er einen solchen Punkt auch bei zwei ähnlichen körperlichen Gebilden. Diese Untersuchung führt ihn jedoch auf Gleichungen, deren Behandlung verwickelt wird, weshalb er die analytische Auflösung nicht weiter verfolgt, sondern sich der geometrischen zuwendet.

Die Theorie dieses allgemeinen Aehnlichkeitspunkts, den wir den Eulerschen nennen wollen, wird sich auf folgende Betrachtungen zurückführen lassen.

Es ist klar, dass der Eulersche Aehnlichkeitspunkt für zwei in einer Ebene liegende ähnliche Figuren gefunden ist, wenn man ihn für zwei homologe Seiten derselben bestimmen kann, weshalb die Aufgabe, ihn für zwei ähnliche Figuren zu finden, sich auf folgende Aufgabe reducirt:

„In einer Ebene sind zwei Gerade gegeben, für welche der Eulersche Aehnlichkeitspunkt gefunden werden soll.“

Auflösung. Wenn die gegebenen Geraden mit einander parallel sind, so ist der gesuchte Punkt der Durchschnittspunkt derjenigen Geraden, welche die homologen Endpunkte derselben verbinden. Tritt aber dieser specielle Fall nicht ein, sondern haben (Fig. 11.) die Geraden AB, ab, eine beliebige Lage gegen einander, so verlängere man dieselben bis sie sich in c schneiden; beschreibe alsdann einen durch A, a, und c gehenden Kreis, theile Aa im Punkte D so, dass $AD : Da = AB : ab = 1 : m$ werde, hälfte den Kreisbogen AEa im Punkte E, und ziehe ED bis deren Verlängerung den Keis in F schneidet, so ist F der gesuchte Aehnlichkeitspunkt.

Beweis. Es kommt nur darauf an, dass, wenn BF und bF gezogen werden, die Dreieke BAF und baF einander ähnlich sind; diess ist aber der Fall; denn zufolge der Construction ist $AF : aF = AD : Da = 1 : m$, und da der Winkel $CaF = CAF$, so ist auch der Winkel $baF = BAF$.

Der Vollständigkeit wegen, wollen wir die Aufgabe vom **Euler**schen Aehnlichkeitspunkte für ebene einander ähnliche Figuren, in ihrer grössten Allgemeinheit analytisch behandeln.

Es seien x, y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der einen Figur, p, q die rechtwinkligen Coordinaten des ihnen homologen Punktes in Beziehung auf ein anderes Coordinatensystem, m bedeute den Verhältnissexponenten der homologen Seiten, α den Winkel, welchen die Axe der q mit der Axe der x bildet, und f und g seien die Coordinaten des neuen Anfangspunktes der Coordinaten, so ist:

$$mx = f + p \sin\alpha - q \cos\alpha$$
$$my = g + p \cos\alpha + q \sin\alpha.$$

Bezeichnet man die gesuchten Coordinaten des Aehnlichkeitspunkts durch A, B, so hat man, da dieser Punkt beiden Figuren auf dieselbe Weise angehört:

$$mA = f + A \sin\alpha - B \cos\alpha$$
$$mB = g + A \cos\alpha + B \sin\alpha, \text{ also:}$$
$$-f = A(\sin\alpha - m) - B \cos\alpha$$
$$-g = A \cos\alpha - B(\sin\alpha - m),$$ aus welchen Gleichungen sich A und B bestimmen lassen; man erhält nämlich:

$$A = -\frac{f(\sin\alpha - m) + g \cos\alpha}{1 - 2m \sin\alpha + m^2} \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$B = -\frac{g(\sin\alpha - m) - f \cos\alpha}{1 - 2m \sin\alpha + m^2} \dots\dots\dots\dots (2)$$

Für den Fall, dass die homologen Seiten der ähnlichen Figuren mit einander parallel sind, ist $\alpha = 90^0$, also

$$A = -\frac{f}{1-m}, \text{ und } B = -\frac{g}{1-m}.$$

Sind ausserdem noch die Figuren congruent und ähnlich liegend, d. h. ist $m = +1$, so werden A u. B unendlich, d. h. der Aehnlichkeitspunkt fällt in unendliche Entfernung. Sind die Figuren zwar congruent, aber symmetrisch liegend, so ist $m = -1$, und man hat $A = -\frac{f}{2}$, und $B = -\frac{g}{2}$, welches auch aus rein geometrischen Betrachtungen leicht hervorgeht.

Wenn der Anfangspunkt der neuen Coordinaten mit dem Anfangspunkte der alten zusammenfällt, d. h. wenn $f = 0$ und $g = 0$ wird, so ergeben die Gleichungen (1) und (2)

$$A = 0 \text{ und } B = 0,$$

oder der Anfangspunkt der Coordinaten ist selbst der gesuchte Aehnlichkeitspunkt.

Wenn der Eulersche Aehnlichkeitspunkt für zwei ähnliche körperliche Gebilde gefunden werden soll, so lässt sich diese Aufgabe durch folgendes Verfahren auflösen. Man verbinde einen beliebigen Punkt des einen Gebildes mit dem ihm homologen des andern durch eine Gerade, und ziehe von diesem eine zweite Gerade in derjenigen Richtung, und von derjenigen Grösse, dass sich dieselbe zum zweiten Gebilde ganz so verhält, wie jene zum ersten Gebilde. Es ist klar, dass der Aehnlichkeitspunkt in derjenigen Ebene liegen wird, welche durch diese beiden Geraden gelegt werden kann, weshalb alles auf die Lösung folgender Aufgabe reducirt ist:

„In einer Ebene (Fig. 12. a.) sind drei Punkte A, B, C gegeben, man soll einen vierten, O, in derselben Ebene finden, so, dass die Dreiecke AOB und BOC einander ähnlich werden, d. h. dass der Winkel AOB $=$ BOC, OAB $=$ OBC, und OBA $=$ OCB werde."

Auflösung. Man sieht leicht, dass zwischen dieser Aufgabe und der Pothenotschen eine sehr nahe Verwandschaft Statt findet. Da nämlich die Punkte A, B, C gegeben sind, so kann man die Seiten AB, BC, und den Winkel ABC als bekannt ansehen. Ferner ist in dem Vierecke AOCB der Winkel AOB $=$ BOC $= 180^0 -$ ABC, bekannt, mithin sind die gegebenen Stücke zur Construction des Punktes O hinreichend, und die Pothenotsche Aufgabe kann auf diesen besondern Fall angewandt werden.

Unter den Auflösungen dieser letzteren erinnere man sich folgender:

Es seien (Fig. 12. b.) A, B, C, die gegebenen Punkte, und O der gesuchte Punkt; die Winkel AOB $=\alpha$, und BOC $=\beta$ seien gegeben. Man ziehe BD, DE, so dass ABD $=\alpha$, CBE $=\beta$ werde; errichte in A und B die Lothe AF und BF auf AB und BD, ebenso in C und B die Lothe CG und BG auf BC und BE, ziehe FG, und fälle aus B auf dieselbe oder deren Verlängerung das Loth BO, so ist bekanntlich O der gesuchte Punkt. Wendet man diese Auflösung auf den in Rede stehenden Fall an, wo $\alpha = \beta = 180^0 -$ ABC, so erhält man unmittelbar die von Euler in der oben angeführten Abhandlung gegebene Construction. Es werden nämlich hier die Geraden BE und BD die Verlängerungen von AB und BC, wodurch AF und BG auf AB; CG und BF auf BC rechtwinklig zu stehen kommen. Das aus B auf FG oder deren Verlängerung gefällte Loth BO bestimmt alsdann, ganz wie bei der Pothenotschen Aufgabe, den gesuchten vierten Punkt, hier den Aehnlichkeitspunkt O.

So wie oben die analytische Lösung der Aufgabe: „Den Eulerschen Aehnlichkeitspunkt bei zwei ebenen Gebilden zu finden," mitgetheilt wurde, möge hier die analytische Lösung derselben Aufgabe für zwei ähnliche körperliche Gebilde noch ihren Platz finden.

Die Schwierigkeiten, welche Euler bei der analytischen Behandlung der in Rede stehenden Aufgabe fand, sind durch die Fortschritte der analytischen Geometrie beseitigt worden.

Jacobi, der Euler unseres Jahrhunderts, hat auch diesen Gegenstand zu erörtern und zu erweitern nicht verschmäht. In einer Abhandlung: „Observationes geometricae" in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik (Band XV. Heft IV.) ist diese Aufgabe nicht nur vollständig gelöst, sondern es sind auch ausserdem noch einige Gegenstände der analytischen Geometrie auseinandergesetzt, die sich bis dahin dem Scharfblicke der Geometer entzogen hatten.

Wenn man die Coordinaten irgend eines Punktes des einen der beiden ähnlichen Körper durch x, y, z, bezeichnet, und für die Coordinaten des andern mx, my, mz setzt, so wird dieser nicht nur dem ersten ähnlich sein, sondern es wird auch gegen die Coordinatenebene genau dieselbe Lage haben, wie jener. Diese letztere Eigenschaft, welche im Allgemeinen nicht Statt finden wird, kann durch Veränderung der Coordinaten beseitigt werden. Setzt man nämlich für die Coordinaten des andern Körpers x′, y′, z′, so ergiebt jene Veränderung der Coordinaten:

$$\begin{aligned} mx &= f + \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\ my &= g + \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \\ mz &= h + \alpha'' x'' + \beta'' y'' + \gamma'' z'' \end{aligned}$$

wo die Grössen, f, α, β u. s. w. ihre bekannte Bedeutung haben.

Bezeichnet man die Coordinaten des gesuchten Aehnlichkeitspunktes durch A, B, C, so hat man, da derselbe zu beiden Körpern auf gleiche Weise gehört, offenbar:

$$\begin{aligned} mA &= f + \alpha A + \beta B + \gamma C \\ mB &= g + \alpha' A + \beta' B + \gamma' C \\ mC &= h + \alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C, \quad \text{oder:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f &= (\alpha - m) A + \beta B + \gamma C \\ -g &= \alpha' A + (\beta' - m) B + \gamma' C \\ -h &= \alpha'' A + \beta'' B + (\gamma'' - m) C, \end{aligned}$$

und es wird nur darauf ankommen, aus diesen Gleichungen die Grössen A, B und C zu bestimmen.

Wenn man diese drei Gleichungen nach der Reihe durch

$$1, \quad \frac{\alpha' + \beta m}{\alpha - m(\beta' + \gamma'') + m^2}, \quad \frac{\alpha'' + \gamma m}{\alpha - m(\beta' + \gamma'') + m^2}$$

multiplicirt und sie alsdann addirt, so ergiebt sich A; wenn man sie durch

$$1, \quad \frac{\beta - (\alpha + \gamma'') + m^2}{\beta + m\alpha'}, \quad \frac{\beta'' + m\gamma'}{\beta + m\alpha'}$$

multiplicirt und alsdann addirt, so ergiebt sich B, und endlich, wenn man sie durch

$$1, \quad \frac{\gamma' + m\beta''}{\gamma + m\alpha''}, \quad \frac{\gamma'' - m(\alpha + \beta') + m^2}{\gamma + m\alpha''}$$

multiplicirt und alsdann addirt, so ergiebt sich C. Diese Ausdrücke für die Coordinaten der Aehnlichkeitspunkte vereinfachen sich durch die Relationen, welche zwischen den Coefficienten α, β, γ u. s. w. Statt finden, und man erhält:

$$A = -\frac{[\alpha - m(\beta' + \gamma'') + m^2]\, f + (\alpha' + \beta m)\, g + (\alpha'' + \gamma m)\, h}{(1 - m)\,[1 - m(\alpha + \beta' + \gamma'' - 1) + m^2]}$$

$$B = -\frac{(\beta + \alpha' m)\, f + [\beta' - m(\gamma'' + \alpha) + m^2]\, g + (\beta'' + \gamma' m)\, h}{(1 - m)\,[1 - m(\alpha + \beta' + \gamma'' - 1) + m^2]}$$

$$C = -\frac{(\gamma + \alpha'' m)\, f + (\gamma' + \beta'' m)\, g + [\gamma'' - m(\alpha + \beta') + m^2]\, h}{(1 - m)\,[1 - m(\alpha + \beta' + \gamma'' - 1) + m^2]}.$$

Gedruckt in der Wedelschen Hofbuchdruckerei.

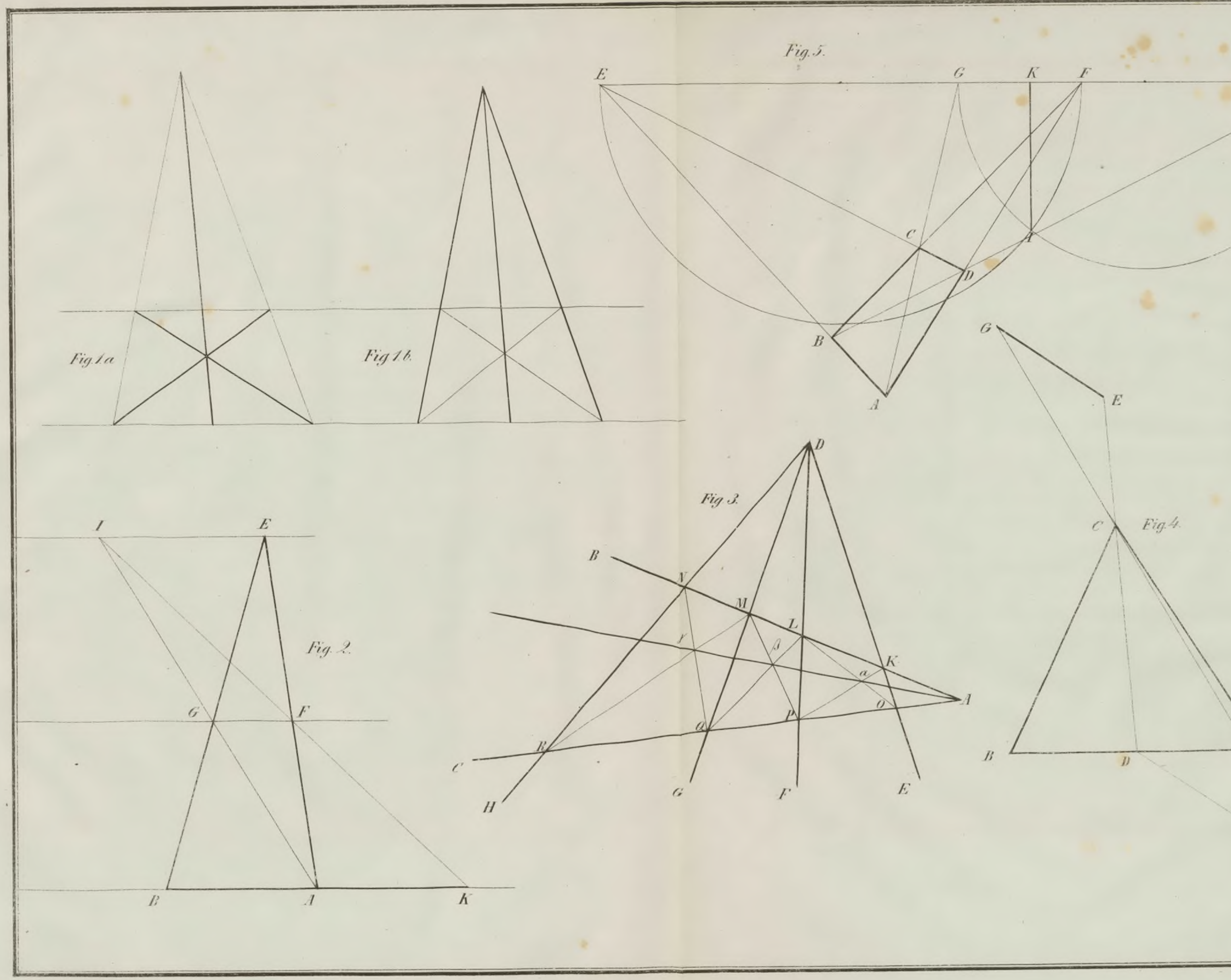

Fig. 1 a.
Fig. 1 b.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

Fig. 6.

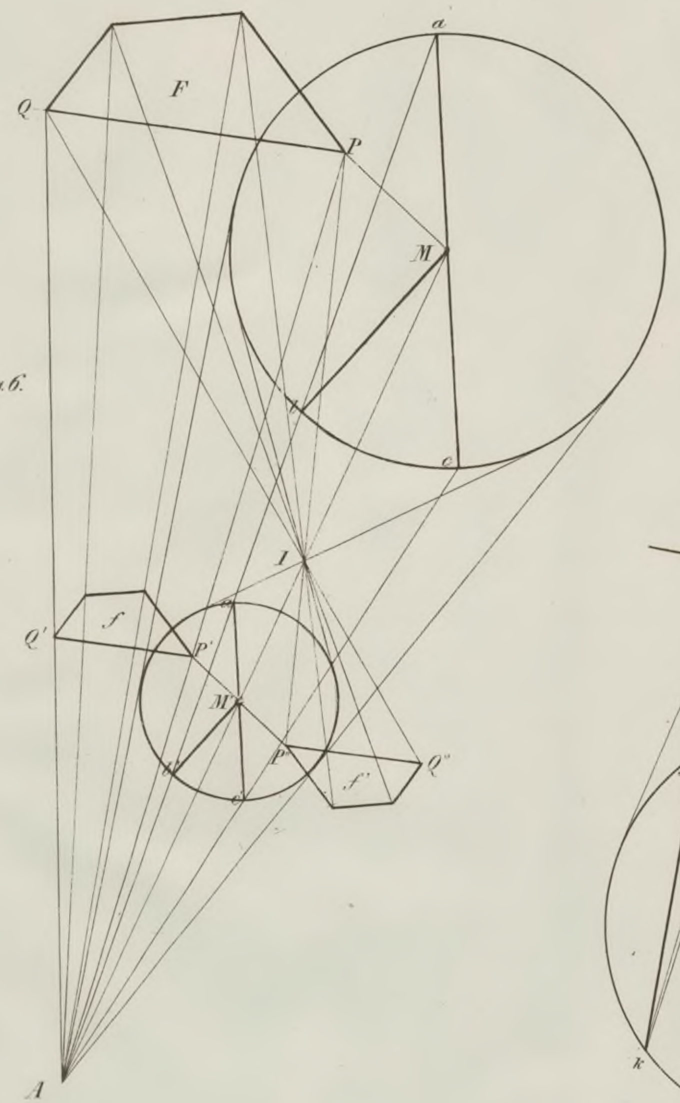


Fig. 7 a.

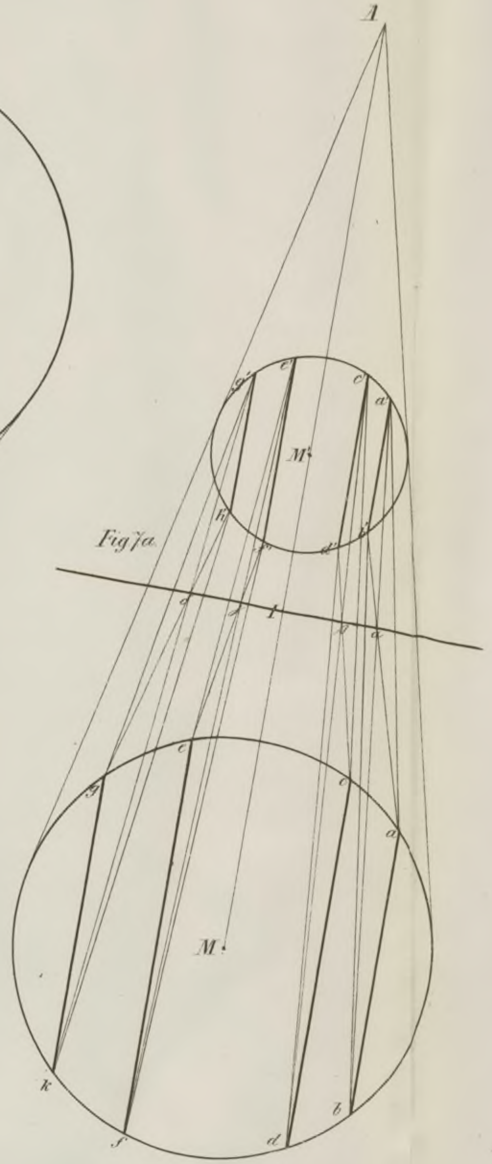


Fig. 7 b.

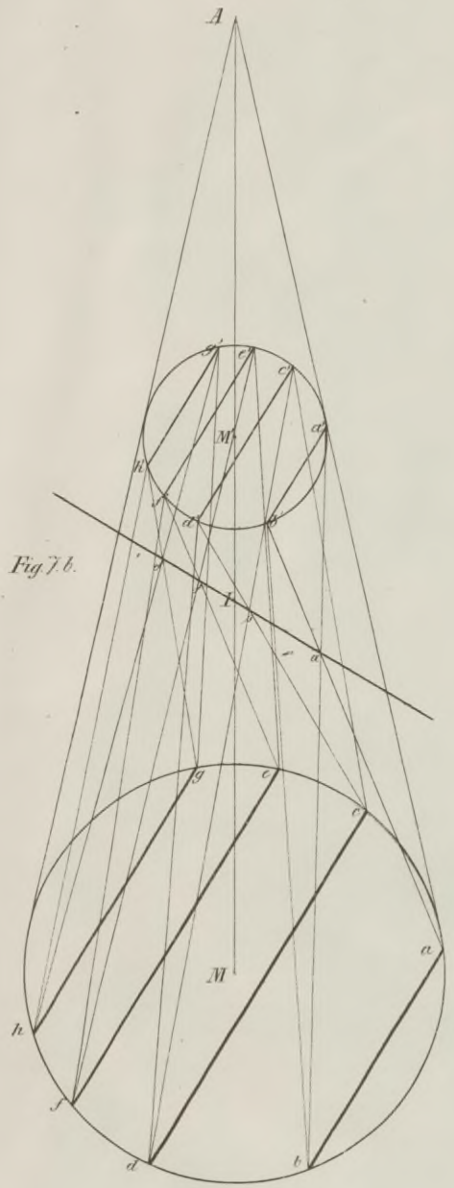
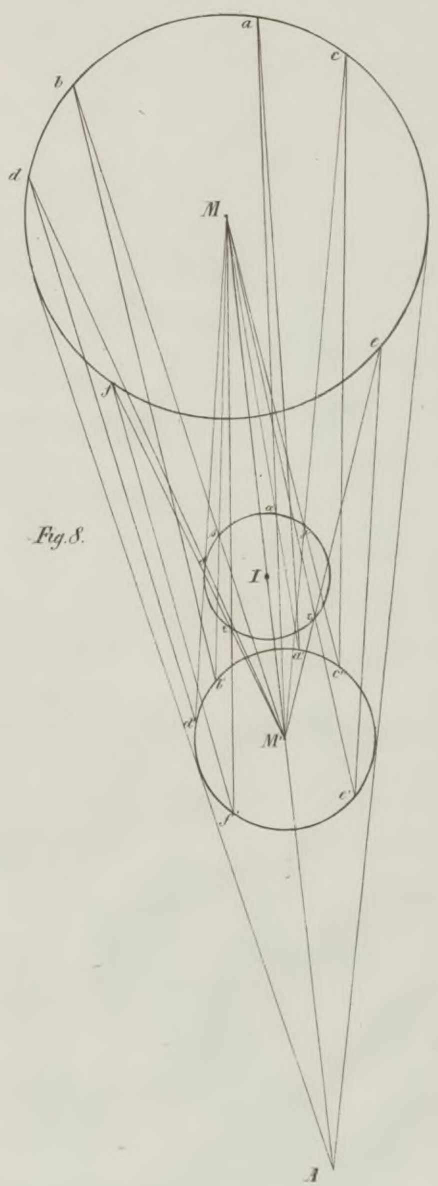
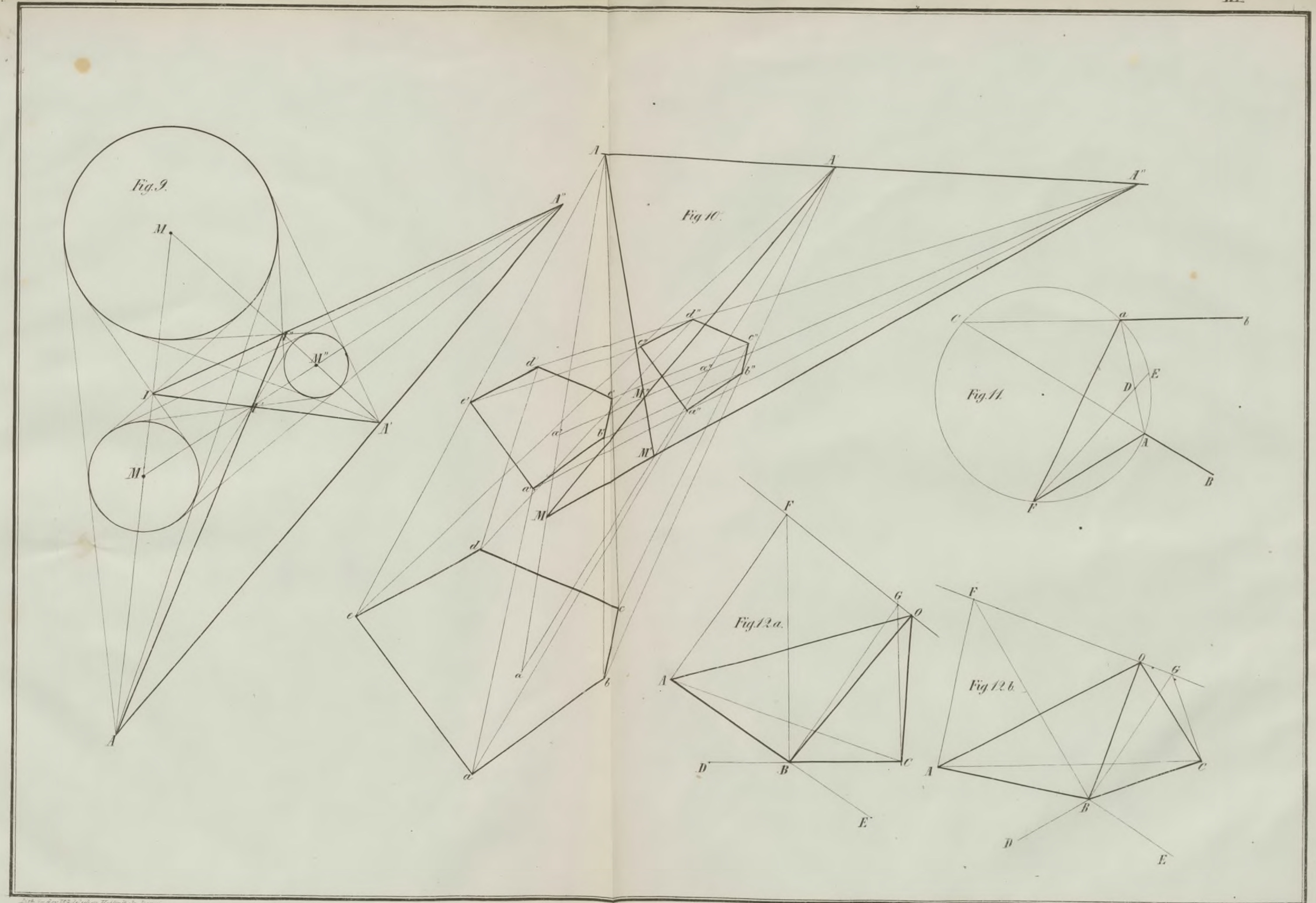


Fig. 8.



Lith. in der Wedel'schen Hofbuchdr. Danzig

Jahn fec.



Lith. in der Wedelschen Hofbuchdr. Danzig.

Jahn fec.